Mathematatik Abitur

2006, 2008

Anleitung zur Vorbereitung auf das Mathematikabitur in der neuen Kursstufe des Gymnasiums (gemäß dem Bildungsplan im Lehrplanheft 3/2001 vom 23.August 2001).

Autoren: D.Komma, ...?

Version 0.2 - 14. März 2008

Inhaltsverzeichnis

Vorwort

Man kann keine Häuser bauen,
ohne vorher der Grund bereitet
noch zumindest Steine
und Mörtel beschafft zu haben.

Nachdem sich das vorliegende Dokument noch am Anfang seiner Entstehung befindet, muss erwähnt werden, dass viele Dinge, die angedacht sind, **zwar hier schon angemerkt aber nicht notwendig ausgeführt sind!**
Im Anhang befindet sich ein Zeitplan mit dessen Hilfe man dieses Dokument bearbeiten sollte. Er ist ein Vorschlag wann und was man wiederholen und üben kann oder sollte.
Außerdem wird empfohlen, sich während der Bearbeitung der Abschnitte und Aufgaben eine entsprechende eigene kleine Formelsammlung anzulegen, die das dargelegte Wissen in noch kürzerer Form als Gedächtnisstütze zusammenfasst.

Es geht zunächst um die grundlegenden algebraische Rechengesetze und Rechenregeln sowie das Lösen von Gleichungen mit einer und mehreren Variablen. Danach folgt die Erweiterung zur Analysis, also Ableitungsregeln für rationale Funktionen sowie deren Integration. Für die Geometrie werden nochmals elementare Sätze erklärt (Strahlensatz, Gleichschenkliges Dreieck, Thales, Pythagoras,...). Anschließend wird der Umgang mit Vektoren und Darstellung von Geraden und Ebenen mit deren Hilfe erläutert.

Die Untersuchung von Funktionen ist keine Grundfertigkeit. Diese wird also im Zweiten Teil erläutert. Eigenschaften von Potenzfunktionen und deren Schaubilder. Verhalten für große Argumente. Definitionsbereich, Lücken. Symmetrie und Verschiebung. Asymptoten und Näherungskurven. Nullstellen, Hoch-, Tief- und Wendepunkte.

Im Dritten Teil befinden sich Zusammenfassungen der gängigen Schnittprobleme in der analytischen Geometrie. Außerdem Vektorbeweise und Teilverhältnisse....

I Grundfertigkeiten

Grundfertigkeiten

Es ist nicht zu wenig Zeit, die wir haben,
sondern es ist zuviel Zeit,
die wir nicht nutzen.

Seneca

Dieser Teil stellt nochmals die wichtigen zu beherrschenden Grundfertigkeiten dar. Zur besseren Übersicht ist jeder Abschnitt folgendermaßen gegliedert:

Zugehörige Problemstellungen

- ➪ Nullstellen von Geraden
- ➪ ...
- ➪

Mathematische Beschreibung, Formale Darstellungen, Erklärungen und Erläuterungen

Lineare Gleichungen mit einer Unbekannten lassen sich auf die Form

$$a_0 + a_1 x = 0$$

bringen. Dabei sind ....

Lösungsverfahren und -methoden, Beispiele

Äquivalenzumformung: Die Gleichung

$$a_0 + a_1 x = 0$$

wird nach x aufgelöst indem ...

Beispiel: Die lineare Gleichung $3x + 4 = 0$ ...

Weitere Hinweise und Tipps (optional)

Ist ein lineare Gleichung gegeben durch....

Hinweis

Anweisungen zur Berechnung mit dem GTR TI-83+

Eine lineare Gleichung lässt sich mit Hilfe des GTR folgendermaßen lösen...

GTR

Weiterführende Vertiefungen, wichtige Verallgemeinerungen (optional)

Das Vertauschen der Zeilen hat keinen Einfluss auf die Lösungsmenge...

Vertiefung

Kurze Einordnung in einen allgmeinen mathematischen Zusammenhang (optional)

Ein lineares Gleichungssystem mit n Unbekannten und m Gleichungen...

Hintergrund

1 Gleichungen lösen

Der größte Unterabschnitt beschäftigt sich mit der Lösung von Gleichungen und Gleichungssystemen. Diese elementaren Fertigkeiten bilden die Grundlage für die Erarbeitung quantitativer Aussage.
In allgmeiner Form sind sie notwendig für die Herleitung mathematischer Zusammenhänge. Fast alle Probleme lassen sich auf das Lösen einer algebraischen Gleichung zurückführen. Man denke beispielsweise an die Lineare Optimierung oder die Bestimmung der Nullstellen von Funktionen und derer Ableitungsfunktionen.

Man unterscheidet zwei verschiedene Arten von Gleichungen:

1. algebraische Gleichungen: Die Unbekannten treten mit **endlich vielen** verschiedenen Potenzen auf.
   Gleichungen mit einer Unbekannten x lassen sich auf die Form

   $$a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + a_4x^4 + \cdots + a_Nx^N = 0$$

   bringen. Dabei a_0 bis a_N die Koeffizienten zu den entsprechenden Potenzen 1 bis N von x.

   Bei mehreren Unbekannten x, y, z,... kommen entsprechende Ausdrücke dazu:

   $$\begin{array}{l} a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + a_4x^4 + \cdots + a_Nx^N \\ \quad +b_1y + b_2y^2 + b_3y^3 + b_4y^4 + \cdots + b_Ny^N \\ \quad +c_1z + c_2z^2 + c_3z^3 + c_4z^4 + \cdots + c_Nz^N \\ \quad \vdots \qquad \vdots \qquad \vdots \qquad \vdots \qquad = 0 \end{array}$$

2. transzendente Gleichungen: Die Unbekannten treten in **beliebig vielen** verschiedenen Potenzen auf, d.h. sie sind u.A. Argumente der Funktionen exp, sin, cos etc...

1.1 Lineare Gleichungen

- Nullstellen von Geraden ($f(x) = 0$ für eine lineare Funktion f)
- Geradenschnittpunkte
- Vergleich zweier linear zunehmender Bestände

Mögliche Formen der Gleichungen in der Unbekannten x:

$$ax + b = cx + d, \qquad ax + b = 0, \qquad mx + c = 0, \qquad a_0 + a_1 x = 0$$

Für

$$ax + b = 0$$

mit $a, b \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ lautet die Lösungsmenge:

$$\mathbb{L} = \left\{ -\frac{b}{a} \right\}$$

Beispiel 1 *Die Gleichung*

$$3x - 2 = 5x + 7$$

besitzt die Lösung

$$x = -\frac{9}{2}.$$

Also

$$\mathbb{L} = \left\{ -\frac{9}{2} \right\}$$

Übungen

Lösungen auf Seite 49

Aufgabe 1: Bestimmen Sie die Lösungen folgender Gleichungen

a) $2x + 3 = 0$	d)	g)
b) $4 = 2x + 3$	e)	h)
c) $3x + 3 = 2 - 2x$	f)	i)

1.2 Lineare Gleichungssyteme

LGS mit 2 Unbekannten

- ➩ Schnittpunkte von Geraden in der Ebene
- ➩ Lineare Optimierung
- ➩ 2-dimensionale Verteilungsprobleme

Ein Gleichungssystem mit zwei Unbekannten x_1 und x_2 und zwei Gleichungen:

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 &= b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 &= b_2 \end{aligned}$$

Die Lösungsmengen bestehen aus Punkten oder Geradengleichungen!

Es gibt viele Möglichkeiten, ein Gleichungssystem durch Auflösen und Einsetzen oder durch Zeilenaddition und -subtraktion zu lösen. Die verlässlichste - aber oft nicht die kürzeste - Methode ist folgende.

Lösung nach dem Gaußverfahren: Nach und nach werden aus jeder Zeile durch Verrechnung mit Summanden so eliminiert, dass das Gleichungssystem **Zeilenstufen** hat. Allgemein: Aus der zweiten Zeile wird der erste Summand entfernt, aus der dritten die ersten beiden, aus der vierten die ersten drei usw.
Hier:

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 &= b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 &= b_2 \qquad : a_{21} \cdot a_{11} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 &= b_1 \\ a_{11}x_1 + \frac{a_{11}}{a_{21}}a_{22}x_2 &= \frac{a_{11}}{a_{21}}b_2 \end{aligned}$$

Dann zieht man die erste Zeile von der zweiten ab und löst diese dann nach x_2.

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 &= b_1 \\ \frac{a_{11}}{a_{21}}a_{22}x_2 - a_{12}x_2 &= \frac{a_{11}}{a_{21}}b_2 - b_1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 &= b_1 \\ x_2 &= \frac{\frac{a_{11}}{a_{21}}b_2 - b_1}{\frac{a_{11}}{a_{21}}a_{22} - a_{12}} \end{aligned}$$

Durch rückwärtiges Einsetzen erhält man dann x_1.
Die Lösungsmenge besteht hier nicht mehr aus nur einer Zahl, sondern einem (geordneten) Zahlenpaar für x_1 und x_2. Man schreibt

$$\mathbb{L} = \{(x_1; x_2)\}$$

Beispiel 2

$$\begin{array}{rcll} 2x_1 + 3x_2 & = & 7 & (1) \\ 5x_1 + 10x_2 & = & 15 & (2) \quad | : 5 \cdot 2 \end{array}$$

$$\begin{array}{rcll} 2x_1 + 3x_2 & = & 7 & \\ 2x_1 + 4x_2 & = & 6 & | - (1) \end{array}$$

$$\begin{array}{rcl} 2x_1 + 3x_2 & = & 7 \\ x_2 & = & -1 \end{array}$$

$$2x_1 + 3 \cdot (-1) = 7 \implies x_1 = 5$$

Dann ist

$$\mathbb{L} = \{(5; -1)\}$$

LGS mit 3 Unbekannten

- ➯ Schnittpunkte von Geraden und Ebenen im Raum in der Ebene
- ➯ 3-dimensionale Verteilungsprobleme

Ein Gleichungssystem mit zwei Unbekannten x_1, x_2 und x_2 und drei Gleichungen:

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 &= b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 &= b_2 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 &= b_3 \end{aligned}$$

Die Lösung findet man wie im Fall von 2 Gleichungen und 2 Unbekannten; nur nach unwesentlich mehr Schritten. Die Lösungsmengen bestehen aber hier aus einem Punkt, aus Geraden- oder Ebenengleichungen!

Beispiel 3

$$\begin{aligned}
3x_1 + 3x_2 - x_3 &= 1 \qquad (1) \qquad | \cdot 2 \\
x_1 - x_2 - 4x_3 &= -7 \qquad (2) \qquad | \cdot 6 \\
2x_1 + 2x_2 + x_3 &= 4 \qquad (3) \qquad | \cdot 3 \\
\\
6x_1 + 6x_2 - 2x_3 &= 2 \qquad (1') \qquad | \\
6x_1 - 6x_2 - 24x_3 &= -42 \qquad (2') \qquad | - (1') \\
6x_1 + 6x_2 + 3x_3 &= 12 \qquad (3') \qquad | - (1') \\
\\
6x_1 + 6x_2 - 2x_3 &= 2 \\
-12x_2 - 22x_3 &= -44 \qquad (2'') \\
5x_3 &= 10 \Rightarrow x_3 = 2 \qquad (4) \\
\\
6x_1 + 6x_2 - 2x_3 &= 2 \\
(4) \textit{ in } (2'') \Rightarrow x_2 &= 0 \qquad (5) \\
\\
(4), (5) \textit{ in } (1) x_1 &= 1
\end{aligned} \tag{1.1}$$

Dann ist also

$$\mathbb{L} = \{(1; 0; 2)\}$$

Allgemeines LGS in Vektor- und Matrixschreibweise

Der Matrix A mit m Zeilen und n Spalten

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

und dem Vektor b mit m Zeilen und einer Spalte

$$b = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$$

Vertiefung

lässt sich für den Unbekannten Vektor x mit n Zeilen und einer Spalte

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

die Gleichung (das Gleichungssystem zuordnen)

$$Ax = b$$

1.3 Potenz- und Wurzelgleichungen

- ➪ Werte von Potenz- und Wurzelfunktionen
- ➪ Berechnung von Wurzeln
- ➪

Mögliche Formen von Potenzgleichungen in der Unbekannten x:

$$x^n = y, \qquad a \cdot x^n + c = 0, \qquad \ldots$$

x ist dabei dabei die Basis und n ein ganzzahliger Exponent.
Für

$$x^n = y$$

mit einem **natürlichen Exponenten** $n \in \mathbb{N}$ und $y \in \mathbb{R}^+$ lautet die Lösung(-smenge):

$$\mathbb{L} = \{\sqrt[n]{y}\}$$

Beispiel 4 *Aus*

$$x^5 = 3$$

folgt

$$x = \sqrt[5]{3}$$

Beispiel 5 *Jedoch für*

$$x^4 = 3$$

gibt es zwei Lösungen!
Es ist

$$x = \pm\sqrt[4]{3}$$

Ist der Exponent ganzzahlig negativ, ist also

$$x^{-n} = y \quad ; \qquad n \in \mathbb{N},$$

dann bildet man auf beiden Seiten den Kehrwert und bringt die Gleichung auf obige Form:

$$x^n = \frac{1}{y}$$

Die Lösung ist dann jetzt eben

$$\mathbb{L} = \left\{\sqrt[n]{\frac{1}{y}}\right\}$$

für $y > 0$.

Beispiel 6 *Gesucht ist die Zahl x, für die der Kehrwert der dritten Potenz gleich 8 ist, also*

$$\frac{1}{x^3} = 8$$

oder

$$x^{-3} = 8$$

oder

$$x^3 = \frac{1}{8}.$$

Damit ist

$$x = \sqrt[3]{\frac{1}{8}} = \frac{1}{\sqrt[3]{8}} = \frac{1}{2}$$

1.4 Quadratische Gleichungen

➯ Nullstellen quadratischer Funktionen ➯

Quadratische Gleichungen sind von der Form

$$a_0 + a_1 x + a_2 x^2 = 0$$

Gängiger ist

$$ax^2 + bx + c = 0$$

Das ist äquivalent zum Problem, die Nullstellen einer quadratischen Funktion f mit

$$f(x) = ax^2 + bx + c$$

zu bestimmen.
Die Lösungsformel lautet

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-b}{2a} \pm \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Dabei ist

$$x_S = \frac{x_1 + x_2}{2} = \frac{-b}{2a}$$

die Scheitelstelle der Parabel mit y = f(x).

Beispiel 7 *Für*

$$-x^2 + 2x + 1 = 0$$

ist die Scheitelstelle der dazugehörigen Parabel

$$x_S = \frac{-2}{2 \cdot (-1)} = 1$$

und die Lösungen der Gleichung sind

$$x_{1,2} = 1 \pm \frac{\sqrt{4 - 4 \cdot (-1) \cdot 1}}{2 \cdot (-1)} = 1 \pm \sqrt{2}$$

Die Lösungsformel allein ist jedoch nicht ausreichend für die Lösung quadratischer Gleichungen. Für die Parameter a, b und c ist eine Fallunterscheidung vorzunehmen; genaugenommen für den Radikanden.

Der Ausdruck $b^2 - 4ac$ heißt **Diskriminante** und wird mit D abgekürzt.

Man unterscheidet folgende Fälle.

Hinweis

1. $D < 0 \Rightarrow$ die Gleichung besitzt keine reelle Lösung. Die zugehörige Parabel liegt vollständig oberhalb oder unterhalb der x-Achse.

2. $D = 0 \Rightarrow$ die Gleichung besitzt eine reelle Lösung (mit der Vielfachheit 2). Die Parabel *berührt* mit ihrem Scheitel die x-Achse.

3. $D > 0 \Rightarrow$ es gibt zwei reelle Lösungen (s.o.) und die Parabel *schneidet* die x-Achse zweimal.

Beispiel 8 *Für*

$$x^2 + 2x + 2 = 0$$

ist die Scheitelstelle der dazugehörigen Parabel

$$x_S = \frac{2}{2 \cdot (-1)} = -1$$

und wegen $b^2 - 4ac = 4 - 4 \cdot 1 \cdot 2 = -4 < 0$ *besitzt die Gleichung keine Lösungen.*

Beispiel 9 *Für*

$$x^2 + 2x + 1 = 0$$

ist die Scheitelstelle der dazugehörigen Parabel ebenfalls

$$x_S = \frac{2}{2 \cdot (-1)} = -1$$

aber wegen $b^2 - 4ac = 4 - 4 \cdot 1 \cdot 1 = 0 < 0$ *besitzt die Gleichung genau die Scheitelstelle als Lösung(en).*

Übungen

Lösungen auf Seite 49

Aufgabe 1: Geben Sie die Lösungsmengen der folgenden Gleichungen an.

a) $3x^2 - 4x + 1 = 0$
b) $x^2 - x = 1$
c) $x^2 - x + 1 = 0$
d) $2x^2 - x = 2$
e) $x^2 + x - 1 = 0$
f) $x^2 = -x - 1$
g) $2x = x^2$
h) $1 - x^2 + 3x = 0$
i) $x^2 + 4 = 4x$

Aufgabe 2: Überprüfen Sie die folgenden Rechnungen auf Fehler.

a) $2x^2 - 3x + 1 = 0$

$$x_{1,2} = \frac{-3 \pm \sqrt{9 - 4 \cdot 2 \cdot (1)}}{2} = \frac{-3 \pm 1}{2} \begin{cases} -2 \\ -1 \end{cases}$$

b) $x^2 - x - 2 = 0$

$$x_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{1 - 4 \cdot 1 \cdot (-2)}}{2} = \frac{1 \pm 3}{2} \begin{cases} 2 \\ -1 \end{cases}$$

Aufgabe 3: Formulieren Sie jeweils eine quadratische Gleichung und geben Sie eine Lösung (für das Problem) an.

a) Wenn man eine Zahl und deren Nachfolger multipliziert, so erhält man 12.
b) Jan und Jana haben $20\mathrm{m}$ Maschendrahtzaun zur Verfügung und möchten eine rechteckige Fläche von $25\mathrm{m}^2$ umzäunen.

1.5 Polynomgleichungen höheren Grades

- ➩ Nullstellen von Funktion
- ➩ Schnitte von Kurven
- ➩

Für Polynomgleichungen höheren Grades (größer als 3) gibt es keine geschlossene Lösungsformeln mehr. Im einfachen Fall sind diese Gleichungen mit Hilfe der Teiler des Absolutgliedes und **Polynomdivision** lösbar. In anderen Fällen kann man die Gleichung durch **Substituieren** auf einfachere Formen reduzieren.
Allgemeine Polynomgleichungen sind von der Form

$$a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_{n-1}x^{n-1} + a_nx^n = 0$$

Das ist äquivalent zum Problem, die Nullstellen einer Funktion f mit

$$f(x) = a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_2x^2 + a_1x + a_0$$

zu bestimmen. Dabei nennt man n, welches die größte auftretende Hochzahl ist, auch den Grad der Gleichung bzw. der Funktion.

1.5.1 Gleichungen dritten Grades

Um die Lösungen einer Gleichung dritten Grades zu finden kann man also zunächst überprüfen, ob die ganzzahligen Teiler des Absolutgliedes einen Teil Lösung darstellen. Dazu setzt man diese der Reihe nach in die Ausgangsgleichung ein. Dabei darf man nicht vergessen, positive und negative Teiler zu berücksichtigen!
Sind x_1, x_2 und x_3 die Lösungen der Gleichung

$$a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 = 0,$$

bzw.

$$ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$$

dann ist

$$\begin{aligned}
&a(x - x_1) \cdot (x - x_2) \cdot (x - x_3) \\
&\quad = a\,(x^2 - x_1 x - x_2 x + x_1 x_2) \cdot (x - x_3) \\
&\quad = a\,(x^3 - x_1 x^2 - x_2 x^2 + x_1 x_2 x - x_3 x^2 + x_1 x_3 x + x_2 x_3 x - x_1 x_2 x_3) \\
&\quad = a\,\big(x^3 - (x_1 + x_2 + x_3)x^2 + (x_1 x_2 + x_1 x_3 + x_2 x_3)x - x_1 x_2 x_3\big) \\
&\quad = ax^3 - a(x_1 + x_2 + x_3)x^2 + a(x_1 x_2 + x_1 x_3 + x_2 x_3)x - a x_1 x_2 x_3
\end{aligned}$$

Daraus folgen zwei wichtige Erkenntnisse:

1. Dividiert man b durch a und wechselt das Vorzeichen, dann erhält man die **Summe der Nullstellen**, denn es gilt wegen Koeffizientenvergleich (s.o.)

$$\begin{aligned}
b &= -a(x_1 + x_2 + x_3) \\
&\Rightarrow\ -\frac{b}{a} = x_1 + x_2 + x_3
\end{aligned}$$

   und

2. Dividiert man das Absolutglied d durch a und wechselt das Vorzeichen, dann erhält man das **Produkt der Nullstellen**, denn

$$\begin{aligned}
d &= -a x_1 x_2 x_3 \\
&\Rightarrow\ -\frac{d}{a} = x_1 x_2 x_3.
\end{aligned}$$

Beispiel 10 *Für*

$$x^3 - 4x^2 + x + 6 = 0$$

sind die Teiler des Absolutgliedes ± 1, ± 2, ± 3 *und natürlich* ± 6. *Damit sind sie mögliche Lösungen der Gleichung. Man setzt der Reihe nach die Zahlen ein:*

$$\begin{aligned}
1^3 - 41^2 + 1 + 6 &= 1 - 4 + 1 + 6 = 4 \neq 0 \\
(-1)^3 - 4(-1)^2 + (-1) + 6 &= -1 - 4 - 1 + 6 = 0\checkmark
\end{aligned}$$

Also ist $x_1 = -1$ *zunächst* **eine** *Lösung der Gleichung.*
Außerdem findet man so heraus, dass 2 *und* 3 *die beiden anderen Lösungen der Gleichungen sind. Die negative Summe der Lösungen, nämlich* $-(-1 + 2 + 3) = -4$ *ist auch gleich dem Vorfaktor von* x^2.

Allzu oft lässt sich nur eine der Nullstellen durch Teilerprobe finden. Dann muss man die Gleichung durch Polynomdivision reduzieren. Ist x_1 dabei die erste gefundene Nullstelle, dann dividiert man durch den Term $(x - x_1)$. Dies ist eine Division ohne Rest, da $(x - x_1)$ Teiler (bzw. Faktor) des ursprünglichen Terms ist (siehe oben)!
Das Ergebnis der Division setzt man wieder gleich null und löst wiederum die neue Gleichung.

Beispiel 11 *Für*

$$x^3 - 4x^2 + x + 6 = 0$$

ist wie oben gesehen $x_1 = -1$ *eine Lösung. Man dividiert nun also durch* $(x - x_1) = (x + 1)$*:*

$$\begin{array}{rrrrl}
(x^3 & -4x^2 & +x & +6) & :(x+1) \quad = \quad x^2 - 5x + 6 \\
-(x^3 & +x^2) & & & \\
\hline
& -5x^2 & +x & & \\
& -(-5x^2 & -5x) & & \\
\hline
& & 6x & +6 & \\
& & -(6x & +6) & \\
\hline
& & & 0 &
\end{array}$$

Die neue Gleichung heißt dann

$$x^2 - 5x + 6 = 0$$

und ist quadratisch. Also lauten die beiden anderen Lösungen

$$x_{2,3} = \frac{5 \pm \sqrt{25 - 4 \cdot 6}}{2} = \frac{5 \pm 1}{2} = \left\{ \begin{array}{l} 2 \\ 3 \end{array} \right.$$

und die Lösungsmenge ist

$$\mathbb{L} = \{-1; 2; 3\}$$

Ist der Faktor vor x^3 ungleich eins wie beispielsweise in

Beispiel 12

$$\frac{1}{2}x^3 - \frac{5}{2}x - 1 = 0.$$

Dann formt man die Gleichung zunächst so um, dass das nicht mehr der Fall ist. Hier multipliziert man beide Seiten mit 2*:*

$$x^3 - 5x - 2 = 0$$

Die Teiler des neuen Absolutglieds -2 *sind* ± 1 *und* ± 2 *und man findet heraus, dass lediglich* $x_1 = -2$ *eine Lösung ist. Polynomdivision mit* $x + 2$ *ergibt*

$$\begin{array}{llllll}
(x^3 & & -5x & -2) & :(x+2) & = \quad x^2-2x-1 \\
\underline{-(x^3} & \underline{+2x^2)} & & & & \\
 & -2x^2 & -5x & & & \\
 & \underline{-(-2x^2} & \underline{-4x)} & & & \\
 & & -x & -2 & & \\
 & & \underline{-(-x} & \underline{2)} & & \\
 & & & 0. & &
\end{array}$$

Und die neue Gleichung

$$x^2 - 2x - 1 = 0$$

hat die Lösungen

$$x_{2,3} = 1 \pm \sqrt{2}$$

und die Lösungsmenge ist

$$\mathbb{L} = \{-2; 1 - \sqrt{2}; 1 + \sqrt{2}\}.$$

1.5.2 Gleichungen vierten und höheren Grades

Um die Lösungen einer Gleichung höheren Grades zu finden kann ebenso wie bei allen anderen überprüfen, ob die ganzzahligen Teiler des Absolutgliedes einen Teil der Lösung darstellen. Dazu setzt man diese der Reihe nach in die Ausgangsgleichung ein. Dabei darf man wieder nicht vergessen, positive und negative Teiler zu berücksichtigen. Es gilt also dasselbe wie für Gleichungen dritten Grades.
So kann man möglicherweise nach und nach den Grad der Gleichung mit Hilfe der Polynomdivision vermindern. Bestimmte Gleichungen höheren Grades kann man auch mit Hilfe einer **Substitution** reduzieren.
Solche Gleichungen haben die Form

$$ax^{2m} + bx^m + c = 0.$$

Man kann auch von m-quadratischen Gleichungen sprechen; insbesondere für $m = 2$ sagt man *biquadratisch*.
Zur Lösung ersetzt man die Potenz x^m durch eine neue Variable u.

$$u := x^m$$

Die neue Gleichung lautet dann

$$au^2 + bu + c = 0$$

und ihre Lösungen findet man dann mit Hilfe der Lösungsformel für quadratische Gleichungen.
Es ist jedoch zu beachten, dass die Lösungen für x gesucht werden. Dazu muss man **Resubstitution** nach

$$x = \sqrt[m]{u}$$

durchführen. Und dann gilt

$$x_{1,2} = \pm\sqrt[m]{u_1} \qquad \text{und} \qquad x_{3,4} = \pm\sqrt[m]{u_2}$$

natürlich bis auf Existenz und das Vorzeichen!

Beispiel 13

$$\frac{1}{2}x^4 - x^2 - \frac{3}{2} = 0$$

Für $u := x^2$ erhält man

$$\frac{1}{2}u^2 - u - \frac{3}{2} = 0$$
$$\Rightarrow u^2 - 2u - 3 = 0$$

und die Zwischenlösungen

$$u_{1,2} = \begin{cases} -1 \\ 3 \end{cases}$$

sowie die Lösungen

$$x_{1,2} = \pm\sqrt{u_1} = \pm\sqrt{-1} \qquad \textit{existiert nicht!}$$

und

$$x_{3,4} = \pm\sqrt{u_2} = \pm\sqrt{3}$$

1.6 Bruchgleichungen

- ➩ Nullstellen gebrochenrationaler Funktionen
- ➩ Schnitte gebrochenrationaler Probleme
- ➩ Anwendungen

Allgemein sind Bruchgleichungen von der Form

$$\frac{p(x)}{q(x)} = C$$

mit den Polynomen p(x) und q(x); oder

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{h(x)}{k(x)}$$

mit den endlichen rationalen Funktionen f, g, h und k.
Prinzipiell lassen sich Bruchgleichungen immer auf Polynomgleichungen zurückführen indem man beidseitig mit den Nennern multipliziert. Zu beachten ist jedoch, dass sich während dieser Umformungen die Definitionsmenge ändert. Dabei sind anfangs diejenigen Zahlen von der Grundmenge auszuschließen, für welche die Nenner gleich Null werden.
Das ist für die Lösungmenge wichtig, denn diese dar die betreffenden Werte ebenfalls nicht enthalten: Die Lösungsmenge ist immer Teilmenge der Grundmenge.

Beispiel 14 *Die Grundmenge für*

$$\frac{x^2-3}{x-2} = 2$$

sei $\mathbb{R}$. *Aus*

$$x - 2 \neq 0$$

folgt $x \neq -2$. *Damit ist die Definitionsmenge* $D = \mathbb{R} \setminus \{-2\}$. *Umformen ergibt*

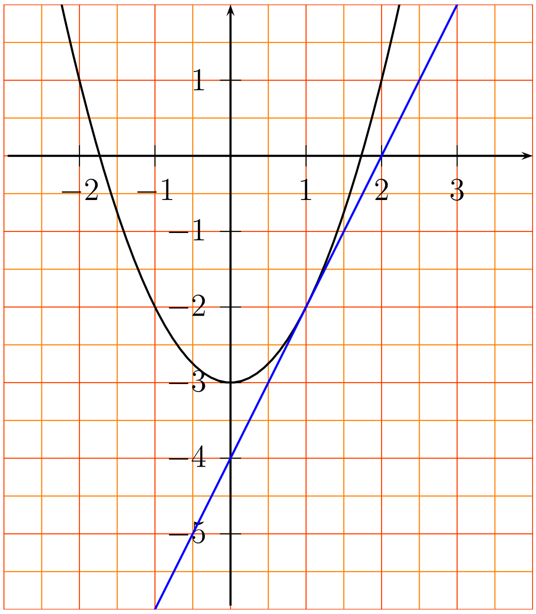
$$\begin{array}{rrcll} & \frac{x^2-3}{x-2} & = & 2 & | \cdot (x-2) \\ \Rightarrow & x^2-3 & = & 2 \cdot (x-2) & \\ \Rightarrow & x^2-3 & = & 2x-4 & | -2x+4 \\ \Rightarrow & x^2-2x+1 & = & 0 & \end{array}$$

Mit der Lösungsformel erhält man

$$x_{1,2} = 1$$

als zweifache Lösung, die auch der Definitionsmenge **nicht** *widerspricht.*

Graphische Interpretation der vorletzten Gleichung und der Lösung: Die Parabel $y = x^2 - 3$ berührt die Gerade $y = 2x - 4$ an der Stelle 1.



Im nächsten Beispiel wird gezeigt, wie die Definitionsmenge die Lösungsmenge einschränken kann.

Beispiel 15 *Die Grundmenge für*

$$\frac{x}{x+1} = \frac{x+3}{x^2-1}$$

sei $\mathbb{R}$. *Aus dem Nenner der linken Seite folgt* $x \neq -1$ *und aus*

$$x^2 - 1 \neq 0$$

folgt $x \neq \pm 1$. *Damit ist die Definitionsmenge* $D = \mathbb{R} \setminus \{\pm 1\}$.
Umformen ohne Nachdenken ergibt

$$\begin{array}{rrcll} & \frac{x}{x+1} & = & \frac{x+3}{x^2-1} & \mid \cdot (x^2-1)\cdot(x+1) \\ \Rightarrow & x\cdot(x^2-1) & = & (x+3)\cdot(x+1) & \\ \Rightarrow & x^3 - x & = & x^2+4x+3 & \mid -(x^2+4x+3) \\ \Rightarrow & x^3 - x^2 - 5x - 3 & = & 0 & \end{array}$$

Man erhält durch Probieren, Polynomdivision und Lösungsformeln (s.o.) als Lösungen für diese Gleichung zunächst zweimal die -1 *und außerdem die* 3. *Allerdings ist* -1 *aufgrund der Definitionsmenge ausgeschlossen und die Lösungmenge ist daher nur*

$$\mathbb{L} = \{3\}$$

Übungen

Lösungen auf Seite 49

Aufgabe 1: Geben Sie die Definitions- und Lösungsmengen der folgenden Gleichungen an.

a) $\frac{1}{x} = \frac{1}{x-1}$ b) $\frac{1}{x-1} = \frac{x-1}{x}$ c) $\frac{x+1}{x} = \frac{x}{x-1}$

Aufgabe 2: Formulieren Sie jeweils eine Gleichung und geben Sie eine Lösung für das Problem an.

a) Ein Stecke AB soll durch einen Punkt T innerhalb der Strecke so geteilt werden, dass sich die kleinere Teilstrecke zur größeren zu verhält wie diese zur Gesamtstrecke.

b)

1.7 Exponentialgleichungen

- Ermittlung der Grundzahl
- Bestimmung des Wachstumsfaktors
- Bestandsabfrage

Bei Exponentialgleichungen tritt unabhängige Variable x im Exponenten auf. Die einfachste Form lautet:

$$a \cdot b^x = y$$

Die Zahl b heißt Grundzahl oder Basis.
Dann ist die Lösung nach Umformen und durch Logarithmieren zur Basis b

$$\begin{aligned} a \cdot b^x &= y & &| : a \\ b^x &= \frac{y}{a} & &| \log_b () \\ x &= \log_b \left(\frac{y}{a}\right) \end{aligned}$$

Beispiel 16 *Einfache Rechenbeispiele*

a) $2^x = 16$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \log_2 2^x &= \log_2 16 \\ \Rightarrow x &= \log_2 2^4 = 4 \end{aligned}$$

b) $3 \cdot 5^x = 75$

$$\begin{aligned} \Rightarrow 5^x &= 25 \\ \Rightarrow \log_5 5^x &= \log_5 25 \\ \Rightarrow x &= \log_5 25 = 2 \end{aligned}$$

c) $10 \cdot 3^x = 1000$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \log_2 3^x &= \log_3 100 \\ \Rightarrow x &= \log_3 100 =? \end{aligned}$$

Taschenrechner können meistens nur Berechnungen zur Basis 10 mit $\log()$ oder zur Basis e mit $\ln()$ durchführen. Möchte man aber

$$x = \log_b y$$

berechnen, dann ist

$$x = \log_b y = \frac{\log y}{\log b}$$

oder

$$x = \log_b y = \frac{\ln y}{\ln b}$$

Beispiel 17 *Zur näherungsweisen Bestimmung von Logarithmen*

a) $10 \cdot 3^x = 1000$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \log_2 3^x &= \log_3 100 \\ \Rightarrow x &= \log_3 100 = \frac{\log 100}{\log 3} \approx \end{aligned}$$

1.8 Logarithmusgleichungen

2 Abbildungen und Funktionen

Abbildungen und Funktionen sind der zentrale Bestandteil der (Schul-) Mathematik. Für diese lassen sich Regeln zur Untersuchung ihres Verhaltens aufstellen:

- große Argumente
- Symmetrie
- Änderung
- Nullstellen
- Extremwerte
- ...

Das heißt, dass wenn man einen Sachverhalt durch eine Funktion ausdrücken kann. Dann kann man mit Hilfe der Analysis Aussagen über die Funktion und damit auch über die beschriebene Sache treffen!

Eine Abbildung mit dem Namen A steht zunächst für eine **Zuordnungsvorschrift**, die jedem Element x einer Menge X, genau ein Element y einer anderen Menge Y zuordnet. Das schreibt man so

$$A : X \longrightarrow Y : x \mapsto y$$

Möchte man nun ausdrücken, dass die Zuordnung A zu einem y von x abhängt, dann schreibt man

$$A : X \longrightarrow Y : x \mapsto y = A(x)$$

$A(x)$ steht dann möglicherweise für einen konkreten Term, zum Beispiel $A(x) = x^2 + 1$. In diesem Fall heißt A dann nicht länger eine *einfache Abbildung* sondern eine **Funktion** und x ist deren **Argument**. Man benennt dann auch Funktionen mit f, g, h, ... und schreibt beispielsweise

$$f : X \longrightarrow Y : x \mapsto y = f(x)$$

Hier ist wieder f der **Funktionsname** und $f(x)$ der **Funktionsterm in** x.

Beispiel 18 *Jeder Zahl x soll ihr Quadrat x^2 zu geordnet werden.*

$$x \mapsto y = x^2$$

Wenn x eine reelle Zahl sein soll und der Abbildungsname g ist, dann schreibt man

$$g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} : x \mapsto y = x^2$$

Oder auch einfach "Gegeben ist die Funktion g mit $g(x) = x^2$.".

3 Differentiation und Integration von Funktionen

3.1 Allgemeines zur Differentiation

Änderung, Tangentensteigung, Linearisierung, Näherung, Newton, Krümmung, Leibniz, ...

3.2 Ableitung rationaler Funktionen

Für ganzrationale Funktionen der Form

$$f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \cdots + a_n x^n$$

formuliert man folgende Ableitungsregeln, beruhend auf den Potenzfunktionen

$$p(x) = x^n$$

und

$$q(x) = x^m$$

a) Potenzregel: "*Hochzahl werden als Faktor vor die Potenz geschrieben und anschließend in der Potenz um eins verringern.*"

$$p'(x) = n \cdot x^{n-1}$$

b) Faktorregel: "*Konstante Faktoren vor den Potenzen bleiben erhalten.*"

$$(C\dot{p}(x))' = C \cdot p'(x) = C \cdot n \cdot x^{n-1}$$

c) Summenregel: "*Summen von Funktionen werden summandenweise abgeleitet.*"

$$(p(x) + q(x))' = p'(x) + q'(x) = n \cdot x^{n-1} + m \cdot x^{m-1}$$

3.3 Ableitung von Verkettungen, Produkten und Quotienten

Funktionen der Form

$$f(x) = g(h(x))$$

mit der **äußeren Funktion** g und der **inneren Funktion** h heißen **verkettete Funktionen** (zusammengesetzte Funktionen).

Hier gilt für die Ableitungsfunktion f', dass

$$f'(x) = h'(x) \cdot g'(h(x)) \qquad \textbf{Kettenregel}$$

Zunächst schreibt man sich $g(y)$ und $h(x)$ hin. Danach leitet man $h(x)$ nach x ab schreibt $h'(x)$ hin. Dann leitet man $g(y)$ nach y ab, schreibt $g'(y)$ wobei man y durch den Term $h(x)$ ersetzt. **Tipp**

Beispiel 19 *Für*

$$f(x) = (x^2 + 3)^3$$

ist

$$g(y) = (y)^3 \qquad \textit{und} \qquad h(x) = x^2 + 3$$

Dann erhält man für die Ableitungen

$$h'(x) = 2x \qquad \textit{und} \qquad g'(y) = 3y^2$$

Also folgt für f'

$$f'(x) = 2x \cdot 3y^2 = 2x \cdot 3(x^2 + 3)^2 = 6x(x^2 + 3)^2$$

Beispiel 20 *Für*

$$f(x) = \sin(2x + 1)$$

ist

$$g(y) = \sin(y) \qquad \textit{und} \qquad h(x) = 2x + 1$$

Dann erhält man für die Ableitungen

$$h'(x) = 2 \qquad \textit{und} \qquad g'(y) = \cos(y)$$

Also folgt für f'

$$f'(x) = 2 \cdot \cos(y) = 2 \cdot \cos(2x + 1)$$

Eine Funktion der Form

$$f(x) = u(x) \cdot v(x)$$

mit den Funktionen u und v nennt man auch **Produktfunktion**.

Die Ableitung des Produktes f lautet

$$f'(x) = u'(x) \cdot v(x) + u(x) \cdot v'(x) \qquad \textbf{Produktregel}$$

Zunächst schreibt man sich $u(x)$ und $v(x)$ hin. Danach leitet man beide nach x ab, erhält also $u'(x)$ und $v'(x)$, und schreibt $f'(x)$ hin. **Tipp**

Beispiel 21 *Für*

$$f(x) = x^2 \sin(x)$$

ist

$$u(x) = x^2 \qquad \textit{und} \qquad v(x) = \sin(x)$$

Die Ableitungen sind

$$u'(x) = 2x \qquad \textit{und} \qquad v'(x) = \cos(x)$$

Also folgt für f'

$$f'(x) = 2x \cdot \sin(x) + x^2 \cos(x)$$

Beispiel 22 *Für*

$$f(x) = xe^x$$

ist

$$u(x) = x \qquad \textit{und} \qquad v(x) = e^x$$

Die Ableitungen sind

$$u'(x) = 1 \qquad \textit{und} \qquad v'(x) = e^x$$

Also folgt für f'

$$f'(x) = 1 \cdot e^x + x \cdot e^x = (1 + x) \cdot e^x$$

Eine Funktion der Form

$$f(x) = \frac{u(x)}{v(x)}$$

mit den Funktionen u und $v \neq 0$ nennt man auch **Quotientenfunktion**.

Die Ableitungsfunktion hier ist der Produktableitung sehr ähnlich:

$$f(x) = \frac{u'(x) \cdot v(x) - u(x) \cdot v'(x)}{v(x)^2}$$ **Quotientenregel**

Zunächst schreibt man sich also wieder $u(x)$ und $v(x)$ hin, leitet man beide nach x ab, erhält also $u'(x)$ und $v'(x)$, und schreibt $f'(x)$ hin. **Tipp**

Beispiel 23 *Für*

$$f(x) = \frac{\sin(x)}{x}$$

ist

$$u(x) = \sin(x) \qquad \textit{und} \qquad v(x) = x$$

Die Ableitungen sind

$$u'(x) = \cos(x) \qquad \textit{und} \qquad v'(x) = 1$$

Also folgt für f'

$$f'(x) = \frac{\cos(x) \cdot x - \sin(x)}{x^2}$$

Beispiel 24 *Für*

$$f(x) = \frac{x^2}{2x+3}$$

mit $x \neq 1$ ist

$$u(x) = x^2 \qquad \textit{und} \qquad v(x) = 2x+3$$

Die Ableitungen sind

$$u'(x) = 2x \qquad \textit{und} \qquad v'(x) = 2$$

Also folgt für f'

$$f'(x) = \frac{2x \cdot (2x+3) + x^2 \cdot 3}{(3x+3)^2} = \frac{2x^2 + 6x)}{(2x+3)^2}$$

Man kann f auch umschreiben und erhält dann

$$f(x) = u(x) \cdot (v(x))^{-1}$$

Jetzt ist f wieder ein Produkt.

Die Ableitung des Produktes f mit Hilfe der Kettenregel für den zweiten Teil lautet

$$f'(x) = u'(x) \cdot (v(x))^{-1} + u(x) \cdot (-v('x)) \cdot (v(x))^{-2}$$

Umformen und auf einen gemeinsamen Nenner bringen ergibt die Quotientenregel

$$f(x) = \frac{u'(x)}{v(x)} - \frac{u'(x) \cdot (-v('x))}{v(x)^2} ...$$

Vertiefung

3.4 Allgemeines zur Integration

- ➪ Bestimmung der Stammfunktion
- ➪ Flächenberechnung
- ➪ Berechnung von Mittelwerten
- ➪ Lösung von Differentialgleichungen

Unter der Integration einer Funktion f versteht man im wesentlichen die Bestimmung ihrer Stammfunktion F, so dass gilt

$$F'(x) = f(x)$$

oder

$$\frac{d}{dx}F(x) = f(x).$$

Umgekehrt schreibt man dabei

$$\int f(x)dx = F(x)$$

Wichtig: Die Bestimmung einer Stammfunktion ohne weitere Voraussetzungen ist eindeutig bis auf eine Konstante, denn bei der Ableitung eines Termes verschwinden konstante Summanden! Beispielsweise besitzen

$$F_1(x) = x^2 + 1 \quad \text{und} \quad F_2(x) = x^2 + 2$$

dieselbe Ableitungsfunktion

$$f(x) = 2x$$

Dabei gilt der Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung für die bestimmte Integration:

Satz 1 *Ist f eine stetige Funktion auf einem Intervall $[a;b]$ und F dort eine Stammfunktion von f, dann gilt*

$$\int\limits_a^b f(x)dx = [F(x)]_a^b = F(b) - F(a)$$

3.5 Integration rationaler Funktionen

Für ganzrationale Funktionen der Form

$$f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + \cdots + a_nx^n$$

lassen sich die Ableitungsregeln umgekehrt als Integrationsregeln anwenden. Wieder beruhend auf den Potenzfunktionen

$$p(x) = x^n$$

und

$$q(x) = x^m$$

kann man also formulieren:

a) Potenzregel: "*Hochzahl werden um eins vergrößert und dann deren Kehrwert als Faktor vor die Potenz geschrieben*"

$$\int p(x)dx = \frac{1}{(n+1)}x^{n+1}$$

Beispiel 25

$$f(x) = x^2 \longrightarrow F(x) = \frac{1}{3}x^3 + C$$

b) Faktorregel: "*Konstante Faktoren vor den Potenzen bleiben erhalten.*"

$$\int c \cdot p(x)dx = c \cdot \int p(x)dx = c \cdot \frac{1}{(n+1)}x^{n+1}$$

Beispiel 26

$$f(x) = 2 \cdot x^2 \longrightarrow F(x) = \frac{2}{3}x^3 + C$$

c) Summenregel: "*Summen und Differenzen von Funktionen werden summandenweise integriert.*"

$$\int p(x)dx \pm q(x)dx = \int p(x)dx \pm \int q(x)dx = \dots$$

Beispiel 27

$$f(x) = 2x^3 - 6x^2 \longrightarrow F(x) = \frac{1}{2}x^4 - 2x^3 + C$$

3.6 Partielle Integration oder Produktintegration

Gilt für die stetigen Funktionen f, u und v, dass $f = u \cdot v$ und sind F und V dazugehörige Stammfunktionen, dann bestimmt man das Integral durch partielle Integration:

$$F = \int f = \int u \cdot v = u \cdot V - \int u' \cdot V$$

Beispiel 28

$$f(x) = x \sin(x)$$

Setze $u = x$ und $v = \sin(x)$; dann ist $u' = 1$ und $V = -\cos(x)$, also

$$\begin{aligned} F(x) = \int f(x)\, dx = \int u(x) \cdot v(x)\, dx &= u(x) \cdot V(x) - \int u'(x) \cdot V(x)\, dx \\ &= x \cdot (-\cos(x)) - \int -\cos(x)\, dx \\ &= x \cdot (-\cos(x)) - (-\sin(x)) \\ &= -x \cdot \cos(x) + \sin(x) \end{aligned}$$

Beispiel 29

$$f(x) = \frac{1}{2} x \sqrt{4-x}$$

Hier ist $u = \frac{1}{2}x$ und $v = \sqrt{4-x}$; $u'(x) = \frac{1}{2}$ und $V(x) = -\frac{2}{3}\sqrt{(4-x)^3}$.

$$\begin{aligned} F(x) &= u(x) \cdot V(x) - \int u'(x) \cdot V(x)\, dx \\ &= \frac{1}{2} x \left(-\frac{2}{3} \sqrt{(4-x)^3} \right) - \int \frac{1}{2} \left(-\frac{2}{3} \sqrt{(4-x)^3} \right)\, dx \\ &= -\frac{1}{3} x \sqrt{(4-x)^3}) - \frac{2}{15} \sqrt{(4-x)^5} \\ &= -\frac{1}{3} x \sqrt{(4-x)^3}) - \frac{2}{15} (4-x) \sqrt{(4-x)^3} \\ &= -\left(\frac{1}{5} x + \frac{8}{15} \right) \sqrt{(4-x)^3} \end{aligned}$$

II Training

Training

1 Pflichtaufgaben

Sämtliche Aufgabe überprüfen das Basiswissen und mathematisches Grundverständnis. In der Regel handelt es sich um Aufgabensätze zu 8 Aufgaben. Dabei sind meistens

- 2 algebraische,
- 3 analytische und
- 3 geometrische

Aufgabentypen.

Mathematik

Pflichtteil - Übung 1

Bearbeitungszeit: 90min.
Hilfsmittel: Keine.

Aufgabe 1: Bestimmen Sie die Lösungsmenge der Gleichung

$$2x^2 + 3x - 2 = 0$$

Aufgabe 2: Bestimmen Sie die Ableitungsfunktion der Funktion f mit

$$f(x) = \frac{(x+1)^2}{x-1}$$

Aufgabe 3: Lösen Sie die Gleichung

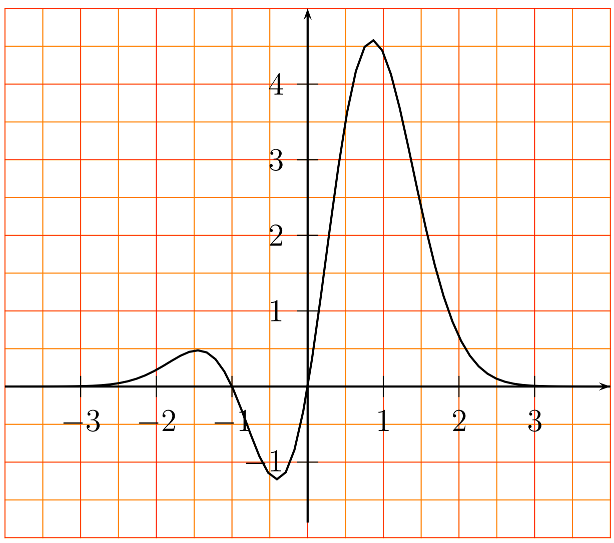
$$e^{2x} - 2 = e^x$$

Aufgabe 4: Gegeben ist gebrochenrationale Funktion g mit

$$g(x) = \frac{x^2+1}{2x}$$

Zeigen Sie, dass das Schaubild symmetrisch zum Ursprung ist. Geben Sie außerdem die Gleichungen für beide Asymptoten an und skizzieren Sie das Schaubild.

Aufgabe 5: Gegeben ist das Schaubild der Funktion f. Bestimmen Sie die Intervalle, in welchen folgende Bedingungen erfüllt sind:



a) Die Funktionswerte von f sind positiv.

b) Das Schaubild fällt monoton.

c) f'' ist positiv.

d) f besitzt in der Umgebung ein lokales Minimum.

Aufgabe 6: Zeigen Sie, dass die Punkte A(1|0|1), B(2|3|-2) und C(1|-1|-2) nicht auf einer Gerade liegen. Bestimmen Sie danach die Ebene, die durch die drei Punkte festgelegt ist und geben sie die zugehörige Normalform an.

Aufgabe 7: Gegeben sind die windschiefen Geraden g und h durch

$$g : \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}; \qquad s \in \mathbb{R}$$

und

$$h : \vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix}; \qquad t \in \mathbb{R}$$

Bestimmen Sie den Abstand der beiden Geraden.

Aufgabe 8: Was wird durch die Gleichung

$$(\vec{x} - \vec{m})^2 = r^2; \qquad \vec{x}, \vec{m} \in \mathbb{R}^3, r \in \mathbb{R}$$

beschrieben und was bedeuten die Parameter $\vec{m}$ und r?
Was entsteht beim Schnitt mit einer Ebene?

Mathematik
Pflichtteil - Übung 2

Bearbeitungszeit: 90min.
Hilfsmittel: Keine.

Aufgabe 1: Bestimmen Sie die Lösungsmenge der Gleichung

$$4x^3 - 3x - 1 = 0$$

Hinweis: Prüfen Sie dazu ganzzahlige Teiler des Absolutglieds.

Aufgabe 2: Bestimmen Sie die Ableitungsfunktion der Funktion f mit

$$f(x) = \sin(2x)\cos(2x)$$

Aufgabe 3: Lösen Sie die Gleichung

$$e^x - 1 = 2e^{-x}$$

Aufgabe 4: Gegeben sind die Funktionen g mit

$$g(x) = \frac{1}{4}x^3 - x$$

und h mit

$$h(x) = \frac{1}{x}$$

Zeigen Sie, dass das Schaubild von $g + h$ symmetrisch zum Ursprung ist.
Geben Sie außerdem die Gleichungen für Näherungsfunktion und die Asymptote und skizzieren Sie das Schaubild.

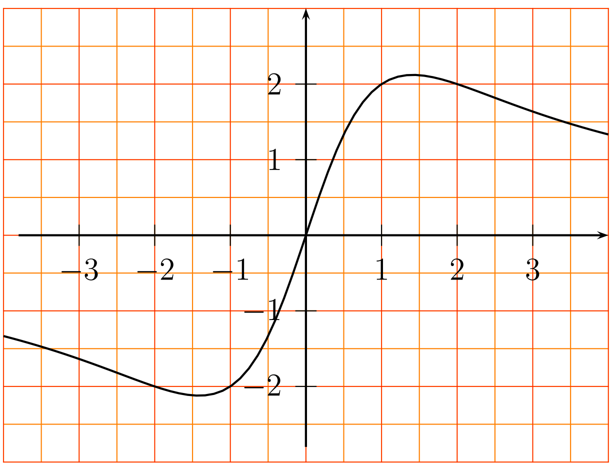
Aufgabe 5: Gegeben ist das Schaubild der Ableitungsfunktion f'. Bestimmen Sie die Intervalle und Stellen, für die folgende Bedingungen erfüllt sind:

a) Die Funktionswerte von f nehmen zu.

b) Das Schaubild von besitzt eine Linkskurve.

c) f ist extremal.

d) f besitzt einen Wendepunkt



Aufgabe 6: Zeigen Sie, dass die Punkte A(2|0|0), B(3|1|-1) und C(0|-2|2) auf auf einer Gerade liegen. Bestimmen Sie danach die Ebene, auf der diese drei Punkte und der Koordinatenursprung liegen und geben sie die zugehörige Normalform an.

Aufgabe 7: Gegeben ist die Gerade g durch

$$g : \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} ; \qquad s \in \mathbb{R}$$

Bestimmen Sie die Punkte X und Y auf den Koordinatenachsen x_1 und x_2, welche den geringsten Abstand zu g haben.

Aufgabe 8: Ein Kreis k mit dem Ursprung als Mittelpunkt und dem Radius r wird in der x_1-x_2-Ebene durch die Gleichung

$$x_1^2 + x_2^2 = r^2$$

beschrieben.
Erklären Sie diese Beziehung anhand einer Skizze.
Wie ändert sich die Gleichung für einen anderen Kreismittelpunkt $\vec{m}$?

Mathematik
Pflichtteil - Übung 3

Bearbeitungszeit: 90min
Hilfsmittel: Keine

Aufgabe 1: Bestimmen Sie die Lösungsmenge des Gleichungssystems

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 &= 0 \\ -x_1 + x_2 + x_3 &= 1 \\ x_2 - 2x_3 &= -1 \end{aligned}$$

Aufgabe 2: Bestimmen Sie die Ableitungsfunktion der Funktion f mit

$$f(x) = \frac{x+1}{x^2-1}$$

Aufgabe 3: Lösen Sie die Gleichung

$$\sin^2 x - \sin x = 0$$

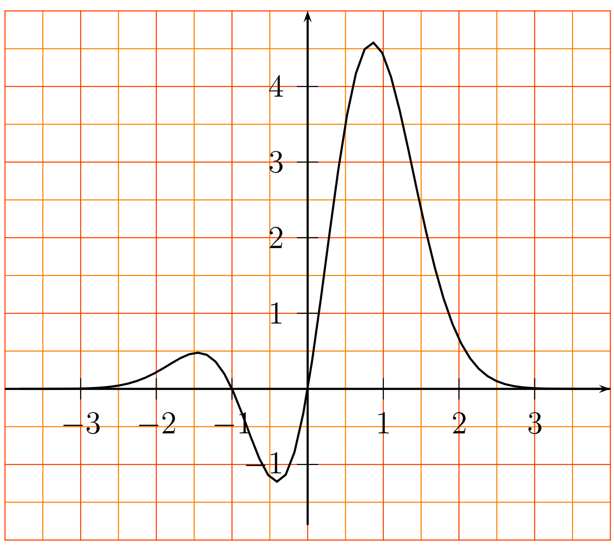
für $x \in [0, 2\pi]$

Aufgabe 4: Gegeben ist gebrochenrationale Funktion g mit

$$g(x) = \frac{x^2}{x-1}$$

Zeigen Sie, dass das Schaubild symmetrisch zum Punkt $(1|2)$ ist.
Geben Sie außerdem die Gleichungen für beide Asymptoten an
und skizzieren Sie das Schaubild.

Aufgabe 5: Gegeben ist das Schaubild der Ableitungsfunktion f''. Bestimmen Sie die Intervalle, in welchen folgende Bedingungen erfüllt sind:



a) f'' ist positiv.

b) Das Schaubild von f besitzt einen Wendepunkt,

c) f' fällt monoton.

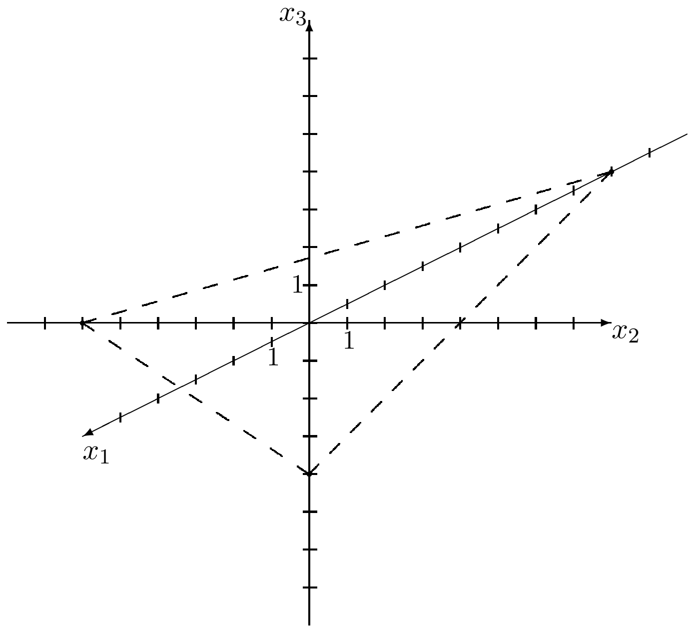
d) Das Schaubild von f besitzt ein mögliches Extremum,

Aufgabe 6: Gegeben ist die Gerade g durch

$$g : \vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}; \qquad s \in \mathbb{R}$$

und der Punkt P(-1|-1|-1).
Bestimmen Sie die Ebene E, welche g und P enthält. Bestimmen sie die Spurpunkte und skizzieren Sie g, P und E in einem Koordinatensystem.

Aufgabe 7: Geben Sie die Parameterdarstellung der Ebenengleichung zu den eingezeichneten Spuren an. Vereinfachen Sie dabei die Werte soweit wie möglich!



Aufgabe 8: Geben Sie eine Vorgehensweise an, um die Punkte A(1|1|0), B(0|0|2) und C(1|-1|2) zu einem regelmmäßigen Viereck zu ergänzen.

Mathematik

Pflichtteil - Übung 4

Bearbeitungszeit: 90min
Hilfmittel: Keine

Aufgabe 1: Bestimmen sie die Lösungen der Gleichung

$$e^{6x} - e^{3x} = 12$$

Aufgabe 2: Geben Sie die Ableitungsfunktion der Funktion f mit

$$f(x) = e^x \cdot cos(2x)$$

an

Aufgabe 3: Bestimmen Sie eine Stammfunktion der Funktion g mit

$$g(x) = \frac{2x}{x^2 - 1}$$

Aufgabe 4: Gegeben sei die Funktion h mit

$$h(x) = \frac{1}{x^2 + 1}$$

Die Funktion besitzt ein Maximum bei $H(0|1)$. Untersuchen Sie h außerdem auf Asymptoten und skizzieren Sie das Schaubild.
Bestimmen sie alle möglichen Kurventangenten, die durch H verlaufen.

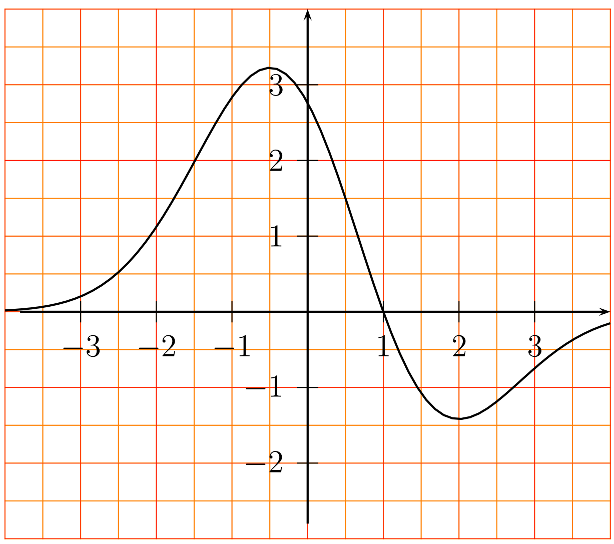
Aufgabe 5: Gegeben ist das Schaubild der Ableitungsfunktion f'. Bestimmen Sie die Intervalle und Stellen, für die folgende Bedingungen erfüllt sind:

a) Die Funktionswerte von f nehmen zu.

b) Das Schaubild von besitzt eine Linkskurve.

c) f ist extremal.

d) f besitzt einen Wendepunkt

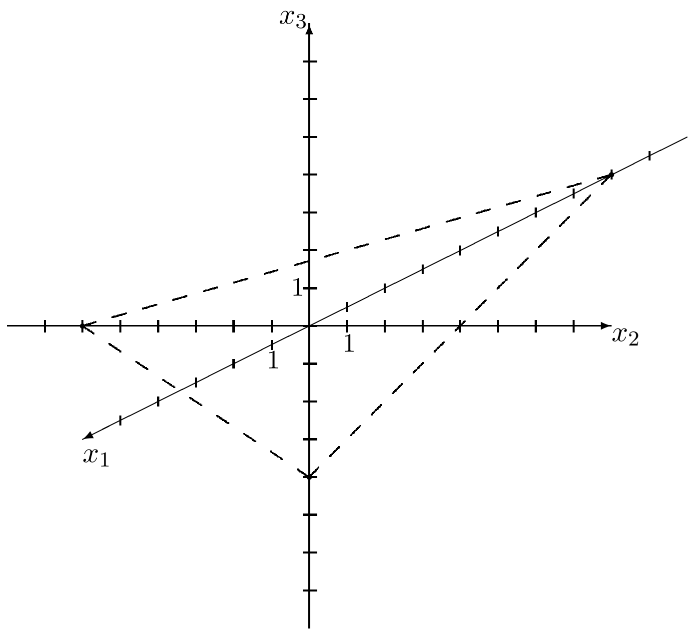


Aufgabe 6: Gegeben ist die Gerade g durch

$$g : \vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}; \qquad s \in \mathbb{R}$$

und der Punkt P(-1|-1|-1).
Bestimmen Sie die Ebene E, welche g und P enthält. Bestimmen sie die Spurpunkte und skizzieren Sie g, P und E in einem Koordinatensystem.

Aufgabe 7: Geben Sie die Parameterdarstellung der Ebenengleichung zu den eingezeichneten Spuren an. Vereinfachen Sie dabei die Werte soweit wie möglich!



Aufgabe 8: Geben Sie eine Vorgehensweise an, um die Punkte A(1|1|0), B(0|0|2) und C(1|-1|2) zu einem regelmmäßigen Viereck zu ergänzen.

A Lösungen

Zu Seite 8 (Lineare Gleichungen) S.8

Aufgabe 1:

a) $-\frac{3}{2}$
b) $\frac{1}{2}$
c) $-\frac{1}{5}$
d)
e)
f)
g)
h)
i)

Zu Seite 17 (Quadratische Gleichungen) S.17

Aufgabe 1:

a) $1, \quad \frac{1}{3}$
b) $\frac{1\pm\sqrt{5}}{2}$
c) keine reelle Lösung
d) $\frac{1\pm\sqrt{17}}{4}$
e) $\frac{-1\pm\sqrt{5}}{2}$
f) keine reelle Lösung
g) $0, \quad 2$
h) $\frac{3\pm\sqrt{13}}{2}$
i) $2, \quad 2$

Aufgabe 2:

a) Das Vorzeichen für $-b$ ist nicht richtig, dort müsste also $+3$ stehen. Und im Nenner wurde der Vorfaktor "2" von x^2 nicht berücksichtigt. Tatsächlich lauten die Lösungen 1 und $\frac{1}{2}$.
b) Die Rechnung ist richtig.

Aufgabe 3:

a) $x \cdot (x+1) = 12 \Rightarrow \mathbb{L} = \{3, -4\}$.
b) x ist die Länge einer Seite. Zwei Seiten sind zusammen halb so lang wie der ganze Umfang. $(10-x)$ ist also Länge der anderen Seite: $x \cdot (10-x) = 25 \Rightarrow \mathbb{L} = \{5\}$.

Zu Seite 25 (Bruchgleichungen) S.25

Aufgabe 1:

a) $D = \mathbb{R} \setminus \{0, 1\}$, $\mathbb{L} = \{\}$
b) $D = \mathbb{R} \setminus \{0, 1\}$, $\mathbb{L} = \{\frac{3\pm\sqrt{5}}{2}\}$
c) $D = \mathbb{R} \setminus \{0, 1\}$, $\mathbb{L} = \{\frac{\pm\sqrt{2}}{2}\}$

Aufgabe 2:

a) $\frac{1}{x} = \frac{x}{1-x} \Rightarrow x_{1,2} = \frac{-1\pm\sqrt{5}}{2}$
b)

B Listen und Pläne

Inhaltliche Übersicht zum Abitur in Mathematik

Grundlagen

1. Rechengesetze
   - ◯ Assoziativgesetz
   - ◯ Kommutativgesetz
   - ◯ Distributivgesetz
2. Rechenregeln
   - ◯ Summen und Differenzen
   - ◯ Produkte und Quotienten
   - ◯ Potenzen
3. Produkte und Potenzen von Summen
   - ◯ Binomische Formeln
   - ◯ Pascalsches Dreieck
4. Zahlmengen, Rechnen mit ...
   - ◯ Brüchen
   - ◯ Potenzen
   - ◯ Logarithmen
5. Sätze im Dreieck
   - ◯ Winkelsummen
   - ◯ Gleichschenklig- und Gleichseitigkeit
   - ◯ Thales
   - ◯ Pythagoras
   - ◯ Höhensatz
6. Rechtwinkliges Dreieck und ebene Trigonometrie
   - ◯ Einheitskreis
   - ◯ Sinus, Cosinus, Tangens
7. Geometrische Abbildungen
   - ◯ Achs- und Punktspiegelungen
   - ◯ Verschiebungen
   - ◯ Drehung
   - ◯ Zentrische Streckung und Strahlensätze

Gleichungen

1. Lineare Gleichungen
2. Lineare Gleichungen 2×2
   - ◯ Einsetzungsverfahren
   - ◯ Additionsverfahren
   - ◯ Determinante, Cramersche Regel
   - ◯ mit Parameter
3. Lineare Gleichungen 3×3
   - ◯ Gaußverfahren
   - ◯ (mit Parameter)
4. Quadratische und biquadratische Gleichungen
   - ◯ Substitution
   - ◯ (mit Parameter)
5. Polynomgleichungen
   - ◯ Polynomdivision
   - ◯ (mit Parameter)
6. Bruchgleichungen
   - ◯ Definitionsmenge
   - ◯ Lösungsmenge
   - ◯ mit Parameter
7. Gleichungen höherer Ordnung
   - ◯ Wurzelgleichungen
   - ◯ Exponentialgleichungen
   - ◯ Logarithmusgleichungen
   - ◯ Trigonometrische Gleichungen

Funktionen

1. Allgemein
   - ◯ Definitions- und Wertebereich
   - ◯ Symmetrie
   - ◯ Stetigkeit
   - ◯ Monotonie
   - ◯ Differenzierbarkeit
   - ◯ Verhalten für große x
   - ◯ Umkehrfunktion
2. Ableitungsregeln
   - ◯ Potenz-, Faktor- und Summenregel
   - ◯ Kettenregel
   - ◯ Produktregel
   - ◯ Quotientenregel
3. Kurvenscharen
   - ◯ Ableitung
   - ◯ Extrem- und Wendepunkte
   - ◯ Ortskurven
4. Tangenten
   - ◯ an eine Kurve in einem Kurvenpunkt
   - ◯ mit vorgegebener Steigung an eine Kurve
   - ◯ an eine Kurve von einem Punkt außerhalb
5. Trigonometrische Funktionen
   - ◯ Symmterie und Zusammenhang
   - ◯ Rechenregeln

Wachstum

1. Grundlagen
   - ◯ Wachstum als Summe diskreter Zunahmen
   - ◯ Differenzialgleichungen, Stammfunktion
   - ◯ (Hauptsatz der Differenzial- und Integralrechnung)
2. Lineares Wachstum
   - ◯
   - ◯
3. Exponentielles Wachstum
   - ◯ Differenzialgleichung
   - ◯ Lösungsansatz
4. Beschränktes Wachstum
   - ◯ Differenzialgleichung
   - ◯ Lösungsansatz
5. Logistisches Wachstum
   - ◯ Differenzialgleichung
   - ◯ Lösungsansatz

Integration

1. Grundlagen
   - ◯ Flächenzerlegung und -näherung
   - ◯ Flächeninhalt als Grenzwert einer Zerlegung
   - ◯ Integral und Integralfunktion
   - ◯ Stammfunktion
   - ◯ Hauptsatz der Differenzial- und Integralrechnung
2. Eigenschaften des Integrals
   - ◯ Intervalladditivität
   - ◯ Linearität
   - ◯ Monotonie
   - ◯
3. Integrationsregeln
   - ◯ Summen-, umgekehrte Faktor- und Potenzregel
   - ◯ Produktintegration
   - ◯ Integration durch Substitution
4. Flächen
   - ◯ Orientierung von Flächen
   - ◯ ... zwischen Kurve und x-Achse (ober- und unterhalb)
   - ◯ .. zwischen zwei Schaubildern
5. Rechnen mit Integralen
   - ◯ Mittelwerte von Funktionen
   - ◯ Uneigentliche Integrale

Vektoren

1. Grundlagen
   - ◯ Punkte und Vektoren im Koordinatensystem
   - ◯ Ortsvektoren
   - ◯ Addition und Subtraktion von Vektoren
   - ◯ Vielfache von Vektoren
   - ◯ Lineare Abhängigkeit von Vektoren
2. Rechnen mit Vektoren
   - ◯ Betrag eines Vektors, Länge einer Strecke (im Raum)
   - ◯ Einheitsvektoren
   - ◯ Winkel zwischen Vektoren
   - ◯ Orthogonalität von Vektoren
   - ◯ Skalarprodukt, Eigenschaften des Skalarprodukts
   - ◯ (Beweise mittels Skalarprodukt)
3. Beweis mit Vektoren
   - ◯ Teilverhältnisse
   - ◯ Vektorzüge

Geraden und Ebenen

1. Beschreibung von Geraden
   - ◯ Vektorielle Darstellung
   - ◯ Geradengleichung in Parameterform
   - ◯ Bestimmung von Geradenpunkten, Punktprobe
2. Zeichnerische Darstellung von Geraden
   - ◯ Spurpunkte
   - ◯
3. Lage von Geraden
   - ◯ Gegenseitige Lage
   - ◯ Schnittpunkt und -winkel
   - ◯ Abstand zweier Geraden
   - ◯ Abstand eines Puntkes von einer Geraden
4. Beschreibung von Ebenen
   - ◯ Vektorielle Darstellung
   - ◯ Ebenengleichung in Parameterform
   - ◯ Bestimmung von Punkten in der Ebene, Punktprobe
   - ◯ ... in Koordinatenform
   - ◯ ... in Normalenform
   - ◯ ... Hessescher Normalenform
5. Zeichnerische Darstellung von Ebenen
   - ◯ Spurpunkte
   - ◯ Spurgeraden, Spurdreieck
6. Lage von Ebenen
   - ◯ Gegenseitige Lage
   - ◯ Schnittgerade und -winkel
   - ◯ Abstand zweier Ebenen
   - ◯ Abstand eines Punktes von einer Ebene
7. Lage von Punkte, Geraden und Ebenen
   - ◯ Gegenseitige Lage von Geraden und einer Ebene
   - ◯ Schnittwinkel zwischen Gerade und Ebene
   - ◯ Abstand einer Geraden von einer Ebene
   - ◯