

# Wachstumsvorgänge und Differenzialgleichungen

## Mathematik - Kursstufe 12

2004-2006

Informationen zum Projekt Wachstumsvorgänge und Differenzialgleichungen. Aufgeführt sind zunächst Erklärungen zu Differenzialen, Ableitungen und Differenzialgleichungen. Danach kommen grundlegende Beispiele zu verschiedenen Problemstellungen:

- ⇒ Bestand und Zeit (Wachstum)
- ⇒ Ort und Zeit (Bewegungsgleichungen)
- ⇒ Energierhaltung

Im Anschluss an die Beispiele wird erklärt, wie aus einer Differenzialgleichung eine Differenzenleichung wird. Damit sind differenzielle Probleme näherungsweise bzw. numerisch zu lösen.

## Differenziale und Ableitungen

Für eine Funktion  $f$  mit dem Funktionsterm  $x$  bezeichnet

$$f' : x \mapsto f'(x) = \lim_{X \rightarrow x} \frac{f(x) - f(X)}{x - X}$$

die Ableitung nach  $x$ . Für den Grenzübergang bei  $f'$

$$\lim_{X \rightarrow x}$$

des Differenzenquotienten schreibt man kurz

$$\frac{d}{dx},$$

Die Ausdrücke  $dx$  und  $df(x)$  heißen *Differenziale*. Es sind unendlich kleine Differenzen  $\Delta x$  bzw  $\Delta f(x)$ .

Bei den höheren Ableitungen schreibt man:

$$\frac{d^2}{dx^2}, \frac{d^3}{dx^3}, \dots$$

Es ist

$$f'(x) = \frac{d}{dx}f(x), \quad f''(x) = \frac{d^2}{dx^2}f(x), \quad f'''(x) = \frac{d^3}{dx^3}f(x), \dots$$

## Differenzialgleichung

Gleichungen, in der eine Funktion, Ableitungen der Funktion und die unabhängige Variable auftreten heißen **gewöhnliche Differenzialgleichungen**. Allgemein

$$f'(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots A_0f(x) + A_2f''(x) + \dots$$

Die Unbekannte dieser Gleichung ist  $f$ .  $x$  ist lediglich die Differenziationsvariable. Gesucht ist also eine Funktion  $x$ , welche die Differenzialgleichung erfüllt.

Einfachere Formen sind

$$f'(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots$$

oder

$$f'(x) = A_0f(x) + A_2f''(x) + \dots$$

**Beispiel 1** Die Funktion  $f$  mit  $f(x) = x + x^2$  erfüllt die Differentialgleichung

$$f'(x) = 1 + 2x$$

**Beispiel 2** Die Funktion  $g$  mit  $g(x) = e^x$  erfüllt die Differentialgleichung

$$g'(x) = g(x)$$

denn

$$g'(x) = e^x$$

**Beispiel 3** Die Funktion  $g$  mit  $h(x) = \sin(x)$  erfüllt die Differentialgleichung

$$h''(x) = -1 \cdot h(x)$$

denn

$$h''(x) = -\sin(x)$$

Haben die Funktion und die Differenzierungsvariable bestimmte Bedeutungen, wählt man günstigerweise andere Bezeichnungen.

### Bestand und Zeit

Entspricht die gesuchte Funktion einem Bestand, dann wählt man dafür meistens  $B$  als Bezeichnung. Sie ist abhängig von der Zeit  $t$ . Die Bestandsänderung entspricht der ersten zeitlichen Ableitung von  $B$  und wird mit  $\dot{B}$  bezeichnet.

Es damit  $\dot{B}(t)$  die momentane Änderung des Bestandes zur Zeit  $t$ .

Der Zusammenhang zwischen Bestand  $B(t)$ , Bestandsänderung  $\dot{B}(t)$  und Zeit  $t$  wird durch eine **“Wachstumsgleichung”** beschrieben:

$$\dot{B}(t) = F(B(t), t)$$

Dabei ist  $F(B(t), t)$  ein Term in Abhängigkeit von  $B(t)$  und  $t$ .

**Beispiel 4** Ist die Bestandsänderung proportional zum momentanen Bestand, dann gilt

$$\dot{B}(t) = k \cdot B(t)$$

Der Parameter  $k$  ist ein Wachstumsfaktor und die Lösungsfunktion lautet dann

$$B(t) = Ce^{kt}.$$

Dabei ist die Konstante  $C$  gleich dem Anfangsbestand, denn

$$B(0) = C.$$

Für  $k = \ln 2 \approx 0,693$  verdoppelt sich der Bestand von  $t$  nach  $t + 1$ .

## Ort und Zeit

Soll die gesuchte Funktion einen Ort repräsentieren, so bezeichnet man diese häufig mit  $s$  (oder  $vecr$ ). Die unabhängige Variable  $t$  steht dann für die Zeit. Der Ausdruck  $s(t)$  (oder  $vecr(t)$ ) beschreibt dann den zeitlichen Verlauf einer Bewegung. Für zeitliche Änderungen des Ortes  $s$ , also Ableitungen nach der Zeit  $t$ , wählt man andere Schreibweisen zur eindeutigen Unterscheidung von der Ortsableitung:

$$\frac{d}{dt}s(t) =: \dot{s}(t) \quad (\text{Geschwindigkeit})$$

und

$$\frac{d^2}{dt^2}s(t) =: \ddot{s}(t) \quad (\text{Beschleunigung})$$

Die Newtonsche Grundgleichung lautet

$$\text{Kraft} = \text{Masse} \cdot \text{Beschleunigung}$$

bzw.

$$F = ma$$

Differenziell ausgedrückt wird aus dieser Gleichung

$$F = m\ddot{s}(t)$$

Hängt die Kraft  $F$  vom Weg  $s$  (oder Ort  $\vec{r}$ ) ab dann erhält man eine Differentialgleichung (zweiter Ordnung) mit der gesuchten Funktion  $s(t)$  und der unabhängigen Variablen  $t$ :

$$F(s(t)) = m\ddot{s}(t)$$

Diese Differentialgleichung heißt deswegen auch "**Newtonsche Bewegungsgleichung**"

**Beispiel 5** Für eine konstante, wegunabhängige Kraft  $F$  ist

$$F = m\ddot{s}(t)$$

Daraus folgt

$$\begin{aligned} F &= m\ddot{s}(t) \\ \Leftrightarrow \ddot{s}(t) &= \frac{F}{m} \\ \Rightarrow \dot{s}(t) &= \frac{F}{m}t + C_1 \Rightarrow s(t) = \frac{1}{2}\frac{F}{m}t^2 + C_1t + C_2 \end{aligned}$$

Die Konstanten  $C_1$  und  $C_2$  entsprechen dabei Anfangsgeschwindigkeit und Anfangsort. Es gilt

$$\dot{s}(0) = C_1 \quad (\text{Anfangsgeschwindigkeit})$$

und

$$s(0) = C_2 \quad (\text{Anfangsort})$$

### Energieerhaltung

Für ein abgeschlossenes System gilt in der Physik, dass die Summe  $E$  der mechanischen Energien konstant ist. Gleichbedeutend damit ist, dass die zeitliche Änderung der Energie gleich null ist:

$$\frac{d}{dt}E(t) = 0$$

Ausführlich heißt das für zusammenhängendes und kollineares  $v$ ,  $h$  und  $s$

$$\begin{aligned} & \frac{d}{dt} \left( \frac{1}{2}mv(t)^2 + mgh(t) + \frac{1}{2}Ds(t)^2 \right) = 0 \\ \Leftrightarrow & \frac{1}{2}m \frac{d}{dt}(\dot{s}(t)^2) + mg \frac{d}{dt}s(t) + \frac{1}{2}D \frac{d}{dt}(s(t)^2) = 0 \\ \Leftrightarrow & m\dot{s}(t)\ddot{s}(t) + mg\dot{s}(t) + Ds(t)\dot{s}(t) = 0 \\ \Leftrightarrow & m\ddot{s}(t) + mg + Ds(t) = 0 \end{aligned}$$

falls  $\dot{s}(t) \neq 0$  !

**Beispiel 6** Beim freien Fall wird Lagenergie in Bewegungsenergie umgewandelt und es gilt aufgrund der Energieerhaltung

$$\begin{aligned} & \frac{d}{dt} \left( \frac{1}{2}mv(t)^2 \right) = 0 \\ \Leftrightarrow & m\dot{s}(t)\ddot{s}(t) + mg\dot{s}(t) = 0 \\ \Leftrightarrow & m\ddot{s}(t) + mg = 0 \\ \Leftrightarrow & \ddot{s}(t) = -g \end{aligned}$$

Daraus folgt wieder um, dass

$$s(t) = -\frac{1}{2}gt^2 + C_1t + C_2$$

### Differenzgleichung

Um auf eine Differenzgleichung zu kommen, muss man die Differenziale  $dx$  und  $df(x)$  wieder auf die Differenzen  $\Delta x$  und  $\Delta f(x)$  zurückführen. Aus der kontinuierliche Gleichung

$$f'(x) = F(f(x), x)$$

wird dann eine diskrete:

$$\frac{\Delta f(x)}{\Delta x} = F(f(x), x) \Rightarrow \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = F(f(x_1), x_1)$$

Bei bekanntem  $x_1$ ,  $x_2$  und  $f(x_1)$  lässt sich damit  $f(x_2)$  bestimmen:

$$f(x_2) = f(x_1) + (x_2 - x_1) \cdot F(f(x_1), x_1)$$

oder allgemein für  $x_1, x_2, x_3, \dots, x_n, x_{n+1}, \dots$

$$f(x_{n+1}) = f(x_n) + (x_{n+1} - x_n) \cdot F(f(x_n), x_n)$$

Mittels Wertetabelle lassen sich die Werte für  $f(x_n)$  berechnen

$i$	$x_i$	$f(x_i)$	Zuwachs
1	$x_1$	$f(x_1)$	-
2	$x_2$	$f(x_2) = f(x_1) + (x_2 - x_1) \cdot F(f(x_1), x_1)$	$(x_2 - x_1) \cdot F(f(x_1), x_1)$
3	$x_3$	$f(x_3) = f(x_2) + (x_3 - x_2) \cdot F(f(x_1), x_1)$	$(x_3 - x_2) \cdot F(f(x_2), x_2)$
4	$x_4$	$f(x_4) = f(x_3) + (x_4 - x_3) \cdot F(f(x_1), x_1)$	$(x_4 - x_3) \cdot F(f(x_3), x_3)$
$\vdots$		$\vdots$	

### Beispiel 7 Aus

$$f'(x) = 2x$$

erhält man

$$f(x_2) = f(x_1) + (x_2 - x_1) \cdot 2 \cdot x_1$$

Wenn aufeinanderfolgende  $x_i$  den Abstand 0,2 haben,  $x_1 = 0$  und  $f(x_1) = f(0) = 0$  ist, dann berechnet man

$i$	$x_i$	$f(x_i)$	Änderung
1	0	0	-
2	0,2	$f(0,2) = 0 + 0 = 0$	$(0,2 - 0) \cdot 0 = 0$
3	0,4	$f(0,4) = 0 + 0,08 = 0,08$	$(0,4 - 0,2) \cdot 2 \cdot 0,2 = 0,08$
4	0,6	$f(0,6) = 0,08 + 0,16 = 0,24$	$(0,6 - 0,4) \cdot 2 \cdot 0,4 = 0,16$
5	0,8	$f(0,8) = 0,48$	0,24
6	0,8	0,8	0,32
7	1,0	1,2	0,4
$\vdots$		$\vdots$	

**Beispiel 8** Für einen exponentiellen Wachstumsvorgang gilt

$$f'(x) = kf(x)$$

und daraus erhält man

$$f(x_2) = f(x_1) + (x_2 - x_1) \cdot k \cdot f(x_1)$$

Wenn aufeinanderfolgende  $x_i$  den Abstand 0,1 haben,  $x_1 = 0$ ,  $k = 0,71$  und  $f(x_1) = f(0) = 1$  ist, dann berechnet man

$i$	$x_i$	$f(x_i)$	Zuwachs
1	0	1	-
2	0,1	1,071	$(0,1 - 0) \cdot 0,71 \cdot 1 = 0,071$
3	0,2	1,147	$(0,2 - 0,1) \cdot 0,71 \cdot 1,071 = 0,076041$
4	0,3	1,228	$(0,3 - 0,2) \cdot 0,71 \cdot 1,147 = 0,081439911$
5	0,4	1,316	$(0,4 - 0,3) \cdot 0,71 \cdot 1,228 = 0,087222145$
6	0,5	1,409	$(0,5 - 0,4) \cdot 0,71 \cdot 1,316 = 0,093414917$
$\vdots$		$\vdots$	