

Achterbahnzahlen

Aufgabe 1

Die Achterbahnzahlen (manchmal auch $3n+1$ -Zahlen genannt) sind ein Problem aus der Zahlentheorie. Dabei geht es um eine Zahlenfolge aus natürlichen Zahlen.

- Zunächst wird eine Startzahl gegeben, diese ist das erste Folgenglied.
- Das jeweils nächste Folgenglied wird aus dem letzten Folgenglied gemäß folgender Regeln gebildet:
 - Ist das letzte Folgenglied gerade, wird dieses durch zwei dividiert – das ist das nächste Folgenglied.
 - Ist das letzte Folgenglied ungerade, wird es mit drei multipliziert und dann noch 1 addiert – das ist dann das nächste Folgenglied.

Machen wir dazu ein Beispiel:

1. Startzahl sei 5.
2. 5 ist ungerade, also muss gerechnet werden: $3 \cdot 5 + 1 = 16$ ist die nächste Zahl.
3. 16 ist gerade, also ist $16/2 = 8$ die nächste Zahl.
4. 8 ist gerade, also ist $8/2 = 4$ die nächste Zahl.
5. 4 ist gerade, also ist $4/2 = 2$ die nächste Zahl.
6. 2 ist gerade, also ist $2/2 = 1$ die nächste Zahl.
7. 1 ist ungerade, also ist $3 \cdot 1 + 1 = 4$ die nächste Zahl.
8. Nun geht es ab 5. weiter.

Dieses Beispiel zeigt einerseits, wie mit Hilfe der Bildungsvorschrift die Zahlenfolge entsteht und andererseits, dass es offenbar langweilig wird, sobald die Zahlenfolge einmal den Wert 1 erreicht hat – daher bricht man an dieser Stelle üblicherweise ab.

Man hat schon sehr viele verschiedene Startzahlen verwendet und interessanterweise ist dabei bislang immer irgendwann die Zahlenfolge auf den Wert 1 gelangt. Der neugierige Mathematiker in uns stellt sich da natürlich schon die Frage, ob das denn *immer* so ist? Wie könnte man das herausbekommen?

- Ein naiver Zugang wäre, einfach alle (natürlichen) Zahlen einmal als Startzahl zu verwenden und zu beobachten, was geschieht. Offenkundig ist das aber kein sinnvolles Vorgehen, da es ja unendlich viele natürlichen Zahlen gibt.
- Dazu kommt ein weiteres Problem: Selbst wenn die Anzahl der natürlichen Zahlen endlich wäre käme man so nicht zum Ziel, denn was sollen wir tun, wenn der Computer bei einer bestimmten Startzahl schon drei Wochen am Rechnen ist?

Was sagt uns das? Wir wissen dann ja nicht, ob er noch arbeitet, weil die Zahlenfolge noch nicht auf die 1 gestoßen ist oder ob er noch arbeitet, weil die Zahlenfolge sowieso nie auf 1 stoßen wird. Auch wenn wir noch ein halbes Jahr zugeben kommen wir nicht weiter, wenn der Computer dann immer noch an dieser Zahlenfolge arbeitet – mit der gleichen Überlegung wie oben. Erst wenn wir unendlich lange warten würden, könnten wir eine Aussage treffen.

- Praktisches Ausprobieren führt also nicht zum Ziel, also müsste ein Beweis gefunden werden, der sagt, ob jede Startzahl auf die 1 führt oder nicht. Einen solchen Beweis gibt es bis heute aber noch nicht.

Um ein Gefühl für diese Achterbahnzahlen zu bekommen soll ein Java-Programm geschrieben werden, das mit einer vorgegebenen Startzahl die Zahlenfolge berechnet und ausgibt bis die Folge das erste Mal auf die 1 stößt. Alles was für dieses Programm erforderlich ist ist mittlerweile bekannt und wird hier benötigt:

- Deklaration einer Variablen
- Wertzuweisung bei Variablen
- Variablenwerte ausgeben
- Fallunterscheidung
- Divisionsrest bestimmen
- Schleife (bei nicht im voraus bekannter Zahl an Durchläufen)

Dies muss nun in sinnvoller Weise so zusammengefügt werden, damit das geforderte Programm entsteht.