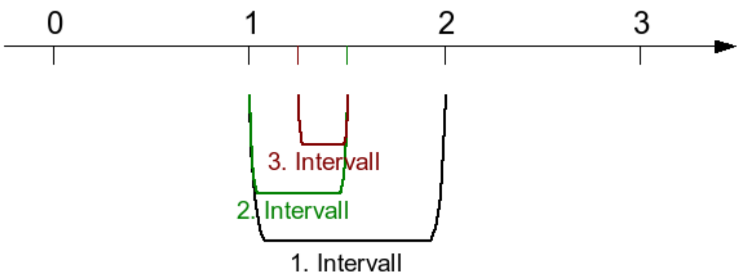
Näherungsweise Wurzelberechnung durch Intervallhalbierung

Aufgabe

Wurzeln können näherungsweise durch fortgesetzte Intervallhalbierung berechnet werden. Das Intervall, in dem der gesuchte Wert liegt, wird dadurch immer kleiner, wir schließen den gesuchten Wert dadurch immer mehr ein.

In diesem Beispiel soll $\sqrt{2}$ berechnet werden. Dazu benötigen wir ein Startintervall, in dem der zu berechnende Wert liegt, z.B. das Intervall von 1 bis 2:



- Wir beginnen mit dem 1. Intervall von 1 bis 2. Wenn der gesuchte Wert darin liegt muss die folgende Ungleichung erfüllt sein:
  $1<\sqrt{2}<2$
  Ob diese Ungleichung erfüllt ist können wir leicht nachprüfen, in dem wir alles quadrieren:
  $1<2<4$
  Diese Ungleichung ist wahr, also liegt im Intervall von 1 bis 2 tatsächlich der gesuchte Wert, allerdings ist das Intervall noch recht groß, es hat die Länge 1.
- Nun halbieren wir unser 1. Intervall – dessen Mitte liegt bei 1,5 – und wir erhalten zwei Teilintervalle: Das linke Teilintervall von 1 bis 1,5 und das rechte Teilintervall von 1,5 bis 2. Interessant von diesen beiden Teilintervallen ist nur dasjenige, in dem der gesuchte Wert liegt. Das finden wir heraus, in dem prüfen, welche der beiden quadrierten Ungleichungen $1^2<2<1{,}5^2$ und $1{,}5^2<2<2^2$ wahr ist – offenbar die erste von beiden.
- Nun wissen wir, dass der gesuchte Wert im Intervall von 1 bis 1,5 liegt – damit haben wir den gesuchten Wert schon besser eingegrenzt, weil er in einem Intervall liegt, das nur noch die Länge 0,5 hat. Daher nehmen wir dieses 2. Intervall als unser neues Intervall, das nun die Untergrenze 1 und die Obergrenze 1,5 hat.
- Dieses Verfahren lässt sich weiter fortsetzen: Das 2. Intervall wird wieder halbiert, die Mitte liegt bei 1,25. Wir erhalten wieder zwei Teilintervalle: Das linke Teilintervall von 1 bis 1,25 und das rechte Teilintervall von 1,25 bis 1,5. Wieder muss geprüft werden, in welchem von beiden der gesuchte Wert liegt. Hier liegt

der gesuchte Wert im rechten Teilintervall, also wird unser neues Intervall das 3. Intervall von 1,25 bis 1,5 – der gesuchte Wert liegt jetzt also in einem Intervall das nur noch die Länge 0,25 hat.

- Je öfter wir dieses Verfahren durchführen, desto kleiner wird das Intervall, in das wir den gesuchten Wert eingegrenzt haben. Allerdings findet das natürlich in diesem Beispiel nie ein Ende, weil das Ziel ja eine Irrationalzahl ist.
- Ein sinnvolles Ende des Verfahrens ist es, abzubrechen, wenn das Intervall eine Länge kleiner als 0,00000008 hat und dann als Näherungswert für die gesuchte Wurzel die Mitte des letzten Intervalls auszugeben.